فصل اول ریاضی - معادلات درجه دوم

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ یک معادله‌ی درجه دوم است. عبارت $\Delta=b^2-4ac$ را دلتای معادله‌ی نامیم که با توجه به علامت آن تعداد ریشه‌ها معلوم می‌شود:

$\boxed{1}$ اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از رابطه‌ی $x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و x_1 بدست می‌آیند.

$\boxed{2}$ اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای یک ریشه مضاعف (مکرر مرتبه ۲) است که از رابطه‌ی $x_0=-\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید.

$\boxed{3}$ اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد.

تعیین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم در حالت خاص: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر شرایط زیر را داشته باشیم، می‌توان سریع جواب معادله را تعیین کرد.

$\boxed{1}$ اگر $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد) آنگاه دو ریشه معادله عبارت است از: $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$

$\boxed{2}$ اگر $b=a+c$ باشد، آنگاه دو ریشه معادله عبارت است از: $x_1=-1$ و $x_2=\frac{-c}{a}$

طرح یک سؤال: هر یک از معادلات $(x-a)=0$ و $(x-a)^2=0$ و $(x-a)^3=0$ چند ریشه دارند؟

$x-a=0 \Rightarrow x=a$

$(x-a)^2=0 \Rightarrow (x-a)(x-a)=0 \Rightarrow x=a$

$(x-a)^3=0 \Rightarrow (x-a)(x-a)(x-a) \Rightarrow x=a$

در معادله‌ی $x-a=0$ اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشه ساده دارد. در معادله‌ی $(x-a)^2=0$ چون دارای دو ریشه برابر است اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشه مضاعف یا مکرر مرتبه ۲ دارد. هم چنین $(x-a)^3=0$ در $x=a$ ریشه مکرر مرتبه ۳ دارد. پس باید بگوییم که هر سه معادله فقط یک ریشه دارد و اختلافشان در نوع ریشه‌هاست نه در تعداد ریشه‌ها.

ریشه معادله:
- ساده: مانند $x=a$ برای $x-a=0$
- مکرر (تکراری):
  - مکرر مرتبه زوج:
    - مکرر مرتبه ۲ = مضاعف: مانند $x=a$ برای $(x-a)^2=0$
    - مکرر مرتبه ۴: مانند $(x-a)^4=0$ برای $x=a$
  - مکرر مرتبه فرد:
    - مکرر مرتبه ۳: مانند $x=a$ برای $(x-a)^3=0$
    - مکرر مرتبه ۵: مانند $x=a$ برای $(x-a)^5=0$

ملاحظه می‌شود که به ریشه مکرر مرتبه ۲، ریشه مضاعف می‌گوییم. ویژگی‌های خاص این ریشه را در قسمت بعد خواهیم آموخت.

مثال: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^2+3x-2=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\times2\times(-2)=25 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} \Rightarrow \frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow \boxed{-2 , \frac{1}{2}}$

ب) $4x^2-4x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4\times4\times1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm0}{8}=\boxed{\frac{1}{2}}$

پ) $x^2+x+1=0 \Rightarrow 1^2-4\times1\times1=-3<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

ت) $5x^2-3x-2=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} x_1=1 , x_2=\frac{c}{a}=-\frac{2}{5}$

ث) $5x^2+3x-2=0 \xrightarrow{a+c=b} x_1=-1 , x_2=-\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$

تست: به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

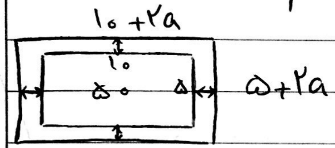
۱) $-3<m<5$ ✓ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)<0$

$m^2-2m-15<0 \Rightarrow (m-5)(m+3)<0 \Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-3 \end{cases}$

تست: درون یک اتاق مستطیل شکل، فرشی وجود دارد که فاصله‌ی هر طرف آن از دیوارهای اتاق به مقدار ثابت a است. اگر ابعاد فرش ۵ و ۱۰ متر و مساحت قسمت‌های فرش نشده ۳۴ متر مربع باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم (ضرایب)

می‌دانیم اگر دلتای معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مثبت باشد، آنگاه معادله دو ریشه متمایز دارد. با فرض آن که $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ باشد داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=$$

$$\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

بنابراین اگر معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه α و β باشد آنگاه جمع و ضرب دو ریشه را به کمک روابط زیر تعیین می‌کنیم. $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$; $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

قدر مطلق تفاضل دو ریشه را نیز به صورت زیر می‌توان به دست آورد:

$$|\alpha-\beta| = \left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، معمولاً جهت تعیین مقدار عباراتی که نسبت به α و β متقارن هستند (یعنی با تعویض جای α و β عبارت تغییر نمی‌کند) ابتدا آن‌ها را برحسب $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ نوشته و پس مقدار آن را حساب می‌کنیم. (عباراتی برحسب α و β متقارن هستند که اگر جای α و β را در آن‌ها عوض کنیم، عبارت تغییری نکند، برای مثال $\alpha^2+\beta^2$ متقارن است، اما $\alpha^2+\beta^3$ متقارن نیست.

نکته: بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم و S و P دو رابطهٔ کاربردی زیر برقرار است:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P \quad ; \quad \alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$$

این دو رابطه به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای و مکعب دوجمله‌ای به دست آمده‌اند:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = S^2-2P$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+\beta^3+3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \Rightarrow$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3SP$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-3x+1=0$ باشند، بدون حل معادله مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=25$

$\cancel{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$ $P(S^2-2P)+\frac{\beta^3+\alpha^3}{(\alpha\beta)^3}$

$\Rightarrow P(S^2-2P)+\frac{S(S^2-2P-P)}{P^3}$

$S=\frac{-b}{a}=3 \quad P=\frac{c}{a}=1 \quad \Rightarrow 1(9-2)+\frac{3(6)}{1}=\boxed{25}$

ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=\alpha-\beta$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{9-4}}{1}=\sqrt{5}$

$\alpha = \beta + 2 \rightarrow \alpha - \beta = 2$, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{15}{3} = 5$

$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 7 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{21}{4} = \frac{m}{3} \Rightarrow \boxed{m = \frac{63}{4}}$

تست: در معادلهٔ $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد m کدام است؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$ ✓

نکته: شرط وجود دو ریشهٔ قرینه در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$b = 0 \ , \ \Delta > 0$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید $\Delta > 0$ باشد و زمانی دو ریشهٔ قرینه (مانند α و $-\alpha$) داریم که جمع دو ریشه یعنی $S = \frac{-b}{a}$ برابر صفر شود، پس $b = 0$ خواهد بود.

نکته: شرط وجود دو ریشهٔ معکوس در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$a = c \ , \ \Delta > 0$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید $\Delta > 0$ باشد و زمانی دو ریشهٔ معکوس (مانند α و $\frac{1}{\alpha}$) داریم که ضرب دو ریشه یعنی $P = \frac{c}{a}$ برابر یک باشد، پس $a = c$ خواهد بود.

تست: به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ درجه دوم $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ دو ریشهٔ حقیقی و معکوس هم دارد؟

$m = m^2 - 6 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \quad (m-3)(m+2) = 0 \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$

۱) -3 ۲) -2 ✓ ۳) 2 ۴) 3

$\Delta > 0 \Rightarrow 25 - 4m(m^2 - 6) > 0$

$m = 3 \Rightarrow 25 - 4 \times 3(9 - 6) = 25 - 36 < 0$ ✗

$m = -2 \Rightarrow 25 - 4 \times -2(4 - 6) = 9 > 0$ ✓

تست: به ازای کدام مقدار k بین دو ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - kx + 8 = 0$ رابطهٔ $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = 3$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

محاسبه عبارات نامتقارن برحسب ریشه‌ها: می‌دانیم همواره ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، مثلاً اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ و $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ است. در محاسبهٔ عباراتی که برحسب α و β متقارن نیستند، معمولاً از این ویژگی صدق کردن ریشه‌ها استفاده می‌شود.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2(4\beta - 1)$ را بدست آورید.

β ریشهٔ معادله است و در معادله صدق می‌کند، بنابراین $\beta^2 - 4\beta + 1 = 0$ و در نتیجه $\beta^2 = 4\beta - 1$

پس داریم:

$$\alpha^2(4\beta - 1) = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 \xRightarrow[P = \frac{c}{a} = 1]{} (1)^2 = 1$$

تست: در معادلهٔ درجه دوم $x^2 + 2x - 4 = 0$، حاصل $x_1^3 + 4x_2 - 2x_2^2$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌اند)

۱) -16 ۲) صفر ۳) 16 ۴) -32

$$x_2^2 + 2x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2^2 = -2x_2 + 4$$

$$x_2 = -2x_2 + 4x_2$$

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \qquad \Delta = 4 - 4 \times -4 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{1} = 2\sqrt{5} \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 2\sqrt{5}\,(-6) = -12\sqrt{5}$$

بحث در علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم:

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه دارد. برای تعیین علامت ریشه‌ها از مطلب زیر استفاده می‌کنیم:

$\Delta > 0$:

- $P > 0$: معادله دو ریشهٔ هم علامت دارد
  - $S > 0$: دو ریشهٔ مثبت دارد.
  - $S < 0$: دو ریشهٔ منفی دارد.
- $P < 0$: معادله دو ریشهٔ غیرهم علامت دارد
  - $S > 0$: از لحاظ قدر مطلق ریشهٔ مثبت بزرگتر است.
  - $S < 0$: از لحاظ قدر مطلق ریشهٔ منفی بزرگتر است.

تذکر: فراموش نشود که $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ زمانی مفهوم جمع و ضرب دارند که Δ مثبت باشد پس باید قبل از تعیین S و P از مثبت بودن Δ مطمئن بود. فقط در حالتی که $P = \frac{c}{a} < 0$ باشد، دیگر نیازی به تعیین علامت Δ نیست. زیرا در این حالت چون a و c غیرهم علامت می‌شوند $ac < 0$ و در نتیجه $\Delta = b^2 - 4ac$ همواره مثبت خواهد بود:

$$\Delta = \underbrace{b^2}_{\text{مثبت یا صفر}} \underbrace{-4ac}_{+} > 0$$

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta=0$ باشد معادله یک ریشه مضاعف دارد که مقدار این ریشه برابر $x=\frac{-b}{2a}$ می باشد، بدیهی است که اگر $\frac{-b}{2a}>0$ معادله ی یک ریشه ی مضاعف مثبت و اگر $\frac{-b}{2a}<0$ معادله یک ریشه مضاعف منفی دارد.

$\Delta>0$ $\quad S=\frac{-b}{2a}<0$

$P=\frac{c}{a}>0$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادله ی $ax^2+(a+3)x-1=0$ دو ریشه منفی دارد؟

1) $a<-9$ ✓ $\quad$ 2) $a<-3$ $\quad$ 3) $a>-1$ $\quad$ 4) $-3<a<0$

$$ax^2+(a+3)x-1=0 \Rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow (a+3)^2+4a>0$$

$$a^2+10a+9>0 \Rightarrow a=-1,\ a=-9$$

	-9		-1	
y	$+$	0 $-$	0	$+$

ج.م $\Rightarrow (-\infty,-9)\cup(-1,+\infty)$

	-3		0	
y	$-$	0 $+$	غ ق ق	$-$

$\Rightarrow (-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$

تشکیل معادله ی درجه دوم از روی ریشه ها:

تا این جا روش بدست آوردن ریشه های یک معادله ی درجه دوم را یاد گرفتیم. اکنون می خواهیم با در اختیار داشتن ریشه ها، معادله ی درجه دوم بسازیم.

برای نوشتن معادله ی درجه دومی که دو ریشه ی α و β دارد، کافی است مقادیر جمع و ضرب ریشه ها (S و P) را تعیین کرده و در معادله ی $x^2-Sx+P=0$ قرار دهیم. زیرا:

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\div a} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

نکته: اگر α و β ریشه های یک معادله ی درجه دوم باشند، آنگاه معادله را به صورت زیر می توان نوشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

مثال: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

$x^2-Sx+P=0 \qquad S=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

$x^2-x+\frac{2}{9}=0 \qquad P=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

روش رسم نمودار تابع درجه دوم:

برای رسم نمودار یک تابع درجه دوم به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ معمولاً مراحل زیر را انجام می دهیم.

1. جهت سهمی را معلوم می کنیم، اگر $a>0$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ سهمی رو به پایین است.
2. Δ را محاسبه می کنیم و در صورتی که مثبت یا صفر باشد، صفرهای تابع را مشخص می کنیم.
3. مختصات نقطه رأس سهمی $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ S را تعیین می کنیم.
4. نقطه تلاقی نمودار با محور عرض ها را بدست می آوریم.

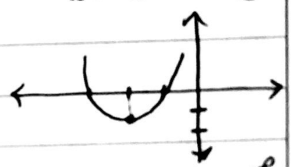
مثال: نمودار تابع $f(x)=x^2+4x+3$ را رسم کنید و مختصات رأس سهمی و معادله ی محور تقارن آن را مشخص نمایید.

$f(x)=(x+3)(x+1) \Rightarrow x=-3$

$x=-1$

$x_S=\frac{-b}{2a}=-2$

$y_S=\frac{12-16}{4}=-1$

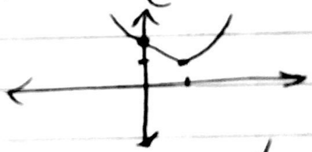


مثال: نمودار تابع $f(x)=x^2-2x+2$ را رسم کنید.

$\Delta<0 \quad c=2$

$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$

$y_S=\frac{8-4}{4}=1$



نکته: اگر x_1 ، x_2 صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند، آن گاه:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$

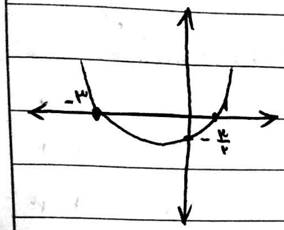
$\Rightarrow a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=a(x^2-Sx+P)=a(x^2-(\frac{-b}{a})x+\frac{c}{a})$

$=ax^2+bx+c$

نکته: در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ اگر x_1 ریشه ی مضاعف معادله ی $f(x)=0$ باشد، آن گاه:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

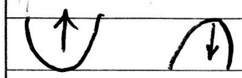
تست ۵: اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد، مقدار $4a^2+b$ کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۱۷
۳) ۵ ۴) ۲

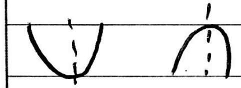
در تابع درجه دوم به شکل کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) به نکات زیر توجه کنید.

$\boxed{1}$ نمودار این تابع یک سهمی قائم است و علامت a جهت سهمی را تعیین می کند. اگر $a>0$ باشد (مثبت) سهمی رو به بالا است و در نتیجه نمودار مینیمم دارد و اگر $a<0$ باشد (منفی) سهمی رو به پایین است و در نتیجه نمودار ماکزیمم دارد.



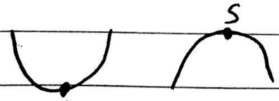
$a>0$ $a<0$

$\boxed{2}$ خط عمودی به معادله‌ی $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.



$x=\frac{-b}{2a}$ $x=\frac{-b}{2a}$

$\boxed{3}$ نقطه‌ی رأس سهمی (S) محل برخورد نمودار با محور تقارن است، بنابراین طول آن $x=\frac{-b}{2a}$ می باشد. برای به دست آوردن عرض نقطه‌ی رأس، این طول را به جای x در تابع قرار می دهیم و با محاسبه‌ی $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ به مقدار $\frac{-\Delta}{4a}$ خواهیم رسید. پس می توان گفت مختصات نقطه‌ی رأس سهمی $S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ می باشد. کاملاً مشخص است که نقطه‌ی رأس سهمی همان نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع است.



مثال ۶: مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-x^2+4x+1$ را به دست آورید.

$$y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow\frac{4\times-1\times1-16}{-4}=\frac{-20}{-4}=5$$

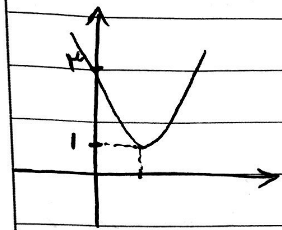
تست: اگر نمودار $f(x)=2x^2+bx+c$ به صورت روبرو باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۴

۲) ۴-

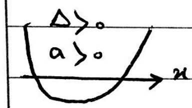
۳) ۲

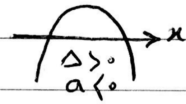
۴) ۲-



وضعیت نمودار تابع درجه دوم نسبت به محور طول‌ها:

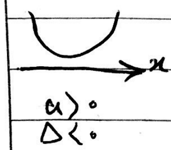
۱) اگر $\Delta>0$ باشد، نمودار تابع محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

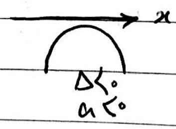




۲)

۳) اگر $\Delta<0$ باشد، نمودار تابع و محور xها نقطه‌ی مشترک ندارند.





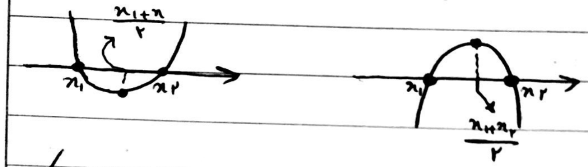
نکات:

از نمودارهای بالا نکات زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

[1] شرط همواره مثبت بودن تابع درجه دوم $a>0$ و $\Delta<0$ است [2] شرط همواره منفی بودن تابع درجه دوم $a<0$ و $\Delta<0$ است.

[3] شرط همواره نامنفی بودن تابع درجه دوم $a>0$ و $\Delta\leq 0$ است [4] شرط همواره نامثبت بودن تابع درجه دوم $a<0$ و $\Delta\leq 0$ است.

نکته: در تابع درجه دوم اگر $\Delta>0$ باشد، طول رأس سهمی وسط صفرهای تابع است. یعنی اگر نمودار تابع درجه دوم محور xها را در نقاط x_1 و x_2 قطع کند، طول نقطه‌ی رأس سهمی $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ می‌باشد.



مثال: اگر صفرهای تابع $f(x)=-x^2+bx+c$ برابر ۲ و ۳- باشد، طول رأس سهمی را تعیین کنید.

$$x_S=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2}$$

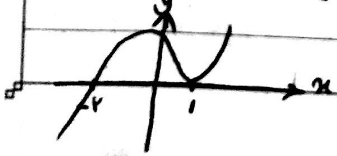
تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور xها است؟

1) $m>-2$ 2) $-2<m<-1$ 3) $-2<m<2$ 4) $-1<m<2$

$-1<m<2$ $a>0$ و $\Delta<0$ $m+2>0$

صفرهای تابع

برای تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را در صورت وجود، صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f، طول نقاط تلاقی یا تماس نمودار با محور طول‌هاست. برای مثال اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه صفرهای تابع برابر ۲- و ۱ می‌باشند. زیرا $x=-2$ طول نقطه‌ی تلاقی و $x=1$ طول نقطه‌ی تماس نمودار $f(x)$ و محور طول‌هاست. ۲- و ۱ ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ محسوب می‌شود.



نکته: اگر $x=a$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ باشد، در این حالت $x=a$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است و در نتیجه $(x-a)$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ می‌نامند. برای به دست آوردن فاکتور یا فاکتورهای دیگر آن باید $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم. چنانچه همه‌ی صفرهای تابع را بخواهیم تعیین کنیم باید تمامی فاکتورها را مساوی صفر قرار دهیم.

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

$f(x)=x^3-x^2-4x+4 \qquad f(2)=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline -x^3-2x^2 & x^2+x-2 \\ \hline x^2-4x+4 & \\ -x^2+2x & \\ \hline -2x+4 & \\ 2x-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x)=(x-2)(x^2+x-2)=(x-2)(x+2)(x-1)$

$\xRightarrow{f(x)=0} x=2,\ x=-2,\ x=1$

در نتیجه ریشه‌های معادله یا همان صفرهای تابع، عبارت است از ۱ و ۲- و ۲

وضعیت تلاقی یا تماس دو تابع نسبت به هم

برای اینکه وضعیت دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را نسبت به هم معلوم کنیم ابتدا دو معادله را با هم می‌گیریم، در نتیجه $f(x)=g(x)$ می‌شود. حال ریشه‌های این معادله را بدست می‌آوریم، اگر ریشه‌های به دست آمده ساده باشد، آن ریشه، طول نقطه‌ی تقاطع (تلاقی) دو تابع است و در صورتی که ریشه‌ی مکرر باشد طول نقطه‌ی تماس می‌شود

نکته: برای بررسی وضعیت یک خط و یک سهمی ابتدا دو تابع را مساوی هم می‌گیریم، یعنی معادله‌ی تلاقی سهمی و خط را می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم تا به یک معادله‌ی درجه ۲ برسیم، در این جا سه حالت وجود دارد.

$\boxed{1}$ اگر در معادله‌ی تلاقی $\Delta > 0$ باشد، آن گاه نتیجه می‌گیریم خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

$\boxed{2}$ اگر در معادله تلاقی $\Delta = 0$ باشد، آن گاه نتیجه می‌گیریم خط بر سهمی مماس است.

۳) اگر در معادله‌ی تلاقی $\Delta<0$ باشد آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط و سهمی نقطه‌ی مشترک ندارند.

تست: خط به معادله‌ی $y=(m+1)x-2$ با سهمی به معادله‌ی $y=2x^2+\frac{m}{2}$ هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

تست: به ازای کدام مقدار a سهمی به معادله‌ی $ay=x^2+5x+4$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹